Муниципальный этап Российской олимпиады по математике 2018-19 учебного года
11 класс *(Время решения – 4 часа)*

1. Если на доске есть ненулевое число a, то разрешается выписать на доску число $\frac{1}{a}$. Если на доске есть числа a и b, то разрешается выписать на доску число $a+b$, также разрешается выписать на доску число $a-b$ (в качестве a и b можно использовать одно и то же число).

   Изначально на доске написано число $3+\sqrt{5}$. Докажите, что при помощи только лишь указанных операций можно выписать на доску число 1.

   Решение. Выпишем на доску число $a=\frac{1}{3+\sqrt{5}}=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$, затем выпишем $2a=a+a$ и $4a=2a+2a$. На доске будут, в частности, числа $3+\sqrt{5}$ и $3-\sqrt{5}$, значит можно будет выписать их сумму, число 6. Далее пишем на доску число $b=\frac{1}{6}$, затем $2b=b+b$, $3b=b+2b$, $6b=3b+3b$, но $6b=1$, чего мы и добивались.

   Комментарий. Если удалось выписать на доску какое-нибудь ненулевое целое число — 2 балла.

   Замечание. 1 можно получить и другими способами.

2. Про многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами известно, что $P(0)$ и $P(1)$ нечётные числа. Может ли многочлен $P(x)$ иметь целые корни?

   Ответ. Нет.

   Решение. Пусть $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$. Если число x чётное, то в сумме $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ все числа, кроме a_0, чётные, $a_0=P(0)$ — нечётное, значит $P(x)$ будет нечётными. Если x нечётное, то и x^k нечётное для любого натурального k, поэтому x^k-1 чётное. Значит $P(x)-P(1)=a_n(x^n-1)+a_{n-1}(x^{n-1}-1)+\ldots+a_1(x-1)$ чётное число, и $P(x)$ — нечётное. Итак, во всех целых точках $P(x)$ нечётное число, то есть не может равняться нулю.

   Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

   Доказано, что $P(2k)\neq 0$ при $k\in\mathbb{Z}$ — 2 балла.

   Доказано, что $P(2k+1)\neq 0$ при $k\in\mathbb{Z}$ — 5 баллов.

3. В ромбе $ABCD$ на стороне DC взяли точку T, а на диагонали AC — точку N так, что углы CAT и NBC равны. Докажите, что $NT=NC$.

   Первое решение. Так как $ABCD$ ромб, то AC — биссектриса равных углов BCD и BAD, и $\angle BCA=\angle DCA=\angle DAC=\angle BAC=\alpha$. Треугольники BNC и DNC равны ($BC=CD$, $\angle BCN=\angle DCN=\alpha$, NC — общая), значит $\angle NDC=\angle NBC=\angle TAN$, и четырёхугольник $ANTD$ вписанный, так как A и D лежат по одну сторону от NT. Отсюда — $\angle NTC=180^\circ-\angle NTD=\angle DAC=\alpha$, значит треугольник TNC равнобедренный и $NT=NC$.

   Второе решение. Треугольники BCN И ATC подобны ($\angle NBC=\angle TAC$ по условию, $\angle BCN=\angle ACT$), значит $\frac{NC}{CT}=\frac{BC}{AC}$, $\frac{NC}{BC}=\frac{CT}{AC}$, и так как $\angle BCA=\angle NCT$, треугольники NCT и ABC подобны. Отсюда — $\frac{TN}{AB}=\frac{NC}{BC}$, и так как $AB=BC$, то $NT=NC$.

   Замечание. В общем случае треугольники BCN и ANT не являются равными.

4. Про три положительных действительных числа x, y и z известно, что $xyz=1$. Докажите, что из трёх чисел $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1+y}$ и $\frac{1}{1+z}$ найдутся два, сумма которых не меньше 1.

Решение. Так как все числа входят в условие $xyz = 1$ симметрично, то без ограничения общности можно считать, что $x \leqslant y \leqslant z$. Если $z < 1$, то $x < 1$ и $y < 1$, значит $xyz < 1$, что противоречит условию. Отсюда $z \geqslant 1$, $zx \geqslant x$, $\frac{1}{zx} \leqslant \frac{1}{x}$. Поэтому $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+\frac{1}{xz}} \geqslant \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+x} + \frac{x}{1+x} = 1$.

5. У Аркадия есть миллион карточек, на каждой из которых он написал натуральное число, при этом написанные числа попарно различны. Борис утверждает, что вне зависимости от того, какие числа написаны, он сможет выбрать непустой набор карточек, сумма чисел на карточках которого будет квадратом натурального числа (набор может состоять из одной карточки). Прав ли Борис?

Ответ. Нет.

Первое решение. Простых чисел бесконечное количество, значит для любого n найдётся такое простое число p, что $p > n$. Обозначим $n = 1 + 2 + \ldots + 1000000$, возьмём простое $p > n$, и напишем на карточках числа $p, 2p, 3p, \ldots, 1000000p$. Тогда сумма чисел любого набора имеет вид kp, где $0 < k \leqslant n < p$, значит k не делится на p. Но если $a^2 = kp$, то a делится на p, значит a^2 делится на p^2, но kp не делится на p^2. Отсюда следует, что сумма чисел на любом наборе карточек не является полным квадратом.

Второе решение. Напишем на карточках различные нечётные степени двойки. Пусть в выбранном наборе наименьшее из чисел — 2^{2k+1}. Тогда сумма чисел набора имеет вид $s = 2^{2k+1}(1+a)$, где a — все ещё сумма степеней двойки (или 0, если взята одна карточка), то есть чётное число. Значит s делится на 2^{2k+1}, но не делится на 2^{2k+2}. Но любое простое число в разложении квадрата обязано входить в чётной степени. Отсюда следует, что s не может быть полным квадратом.

Третье решение. Напишем на первой карточке число 2. Затем будем повторять такую операцию: если сумма чисел на всех заполненных карточках равна s, то мы берём пустую и пишем на ней число $s^2 + 1$. Так как $s < s^2 + 1$ при $s \geqslant 2$, то каждое новое число больше всех предыдущих. Докажем, что такой набор карточек нам подойдёт. Пусть выбран какой-то непустой набор карточек, и наибольшее число среди карточек этого набора равно $a^2 + 1$, сумма чисел на карточках набора равна s. По построению a равно сумме всех чисел на карточках, меньших чем $a^2 + 1$, значит не меньше суммы чисел на любом подмножестве таких карточек (либо у нас есть одна карточка с числом 2, которое не квадрат). Поэтому $a \geqslant s - (a^2 + 1)$, $s \leqslant a^2 + a + 1 < a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$ (эта оценка проходит и в случае, когда в наборе одна карточка, то есть $s = a^2 + 1$). Значит $a^2 < a^2 + 1 \leqslant s < (a+1)^2$, то есть s лежит между двумя квадратами последовательных натуральных чисел, и не может быть квадратом натурального числа.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Любая неверная конструкция не может быть оценена выше 3 баллов.

Замечание. В правильной конструкции на карточках не могут быть записаны квадраты. В частности, в правильной конструкции на карточках не могут быть записаны чётные степени натуральных чисел.