Муниципальный этап Российской олимпиады по математике 2018-19 учебного года

7 класс (*Время решения – 4 часа)*

1. В клетках таблицы 3х3 стояли нули. За один ход можно увеличивать на 1 все числа в каком-либо из квадратов 2х2. Через несколько ходов получилась таблица, показанная на рисунке. Восстановите пропущенные числа. Объясните, почему полученный ответ единственно возможный.

?	?	2
?	15	?
?	10	7

Решение. Угловые клетки исходной таблицы входят только в один квадрат 2х2. Значит, если в угловом квадрате стоит число а, то к квадрату, содержащему эту клетку, операция применялась ровно а раз. Центральная клетка таблицы – в четыре квадрата, остальные клетки – в два квадрата. Воспользуемся этим для пошагового восстановления таблицы. 9=2+7, 3=10-7, 3=15-2-3-7, 5=3+2, 6=3+3.

?	?	2
?	15	9
?	10	7

?	?	2
?	15	9
3	10	7

3	?	2
?	15	9
3	10	7

3	5	2
6	15	9
3	10	7

Комментарий. Приведены разумные рассуждения, из которых следует однозначность восстановления таблицы, все числа таблицы найдены правильно – **7 баллов**. Таблица восстановлена правильно, но пояснения отсутствуют – **5 баллов.** Таблица восстановлена частично (скорее всего, по данному решению – это первые два шага), приведены пояснения, как получены числа – не более **4 баллов.**

2. В футбольной сборной Острова Невезения 11 человек из двух клубных команд: команды «Рыцарь» и команды «Лжец». Игроки команды «Лжец» всегда лгут, а игроки команды «Рыцарь» всегда говорят правду. Четыре члена сборной сделали заявление «В нашей сборной больше 5 рыцарей», после чего другие пять членов сборной сделали заявление «В нашей сборной больше 6 лжецов». Сколько рыцарей и сколько лжецов в сборной? Ответ необходимо обосновать.

Ответ. 5 лжецов и 6 рыцарей

Решение. Второе утверждение не может быть истинным, так как иначе в команде было бы больше 6 лжецов и не меньше 5 рыцарей, то есть, всего больше 11 человек. Значит оно ложно, и в команде не больше 6 лжецов, пять из которых сделали второе высказывание. То есть, всего лжецов 5 или 6. Тогда четверо сделавших первое высказывание, не могут быть лжецами, и в сборной действительно больше 5 рыцарей. Итак, в команде больше 5 рыцарей и 5 или 6 лжецов. Ясно, что на самом деле их может быть только 5, а рыцарей только 6.

Комментарий. Приведено верное решение — **7 баллов**. Приведён верный ответ и показано, что он удовлетворяет условию задачи, но не доказано, что другие варианты невозможны — **3 балла**. Проведены некоторые рассуждения, которые приводят к правильным оценкам, но верный ответ не получен или получен, но не проверен — **не более 1 балла**. В остальных случаях — **0 баллов**. В частности, верный ответ без всяких объяснений — **0 баллов**.

3. Из пункта *A* в пункт *B* одновременно выехали два автомобиля. За рулём одного автомобиля сидел Лихач, а за рулём другого автомобиля Осторожный. Осторожный всю дорогу ехал со скоростью 60 км/час. Лихач сначала ехал со скоростью 120 км/час. Затем с его автомобилем произошла небольшая поломка, после которой он смог продолжить движение со скоростью 30 км/час. В пункт *B* оба автомобиля прибыли одновременно. Какую часть пути Лихач проехал со скоростью 120 км/час?

Ответ. 2/3.

Решение 1. До поломки Лихач едет в 2 раза быстрее, а после поломки в 2 раза медленнее Осторожного. Так как они одновременно выехали и одновременно приедут, в момент

поломки Лихач был вдвое дальше от начала и вдвое ближе к концу. Значит, положения Осторожного и Лихача в этот момент разделили весь путь на 3 равные части.

Решение 2. Пусть x — часть пути, которую проехал Осторожный к моменту поломки Лихача. Тогда Лихач к этому моменту проехал $2x$. Так как приедут они одновременно, получаем уравнение $\frac{1-x}{60} = \frac{1-2x}{30}$, откуда x=1/3 и $2x$=2/3.

Комментарий. Верное решение с верным ответом — **7 баллов**. Верный ответ с проверкой — **3 балла**. Только ответ — **0 баллов**.

4. Натуральные числа от 1 до 100 выписаны по одному на карточках. Вася составляет наборы из трех карточек так, чтобы в каждом наборе одно из чисел равнялось произведению двух других. Какое наибольшее количество таких наборов могло получиться у Васи? (Одна и та же карточка не может входить в два набора.)

   Ответ. 8 наборов.

   Решение. Очевидно, что в каждом наборе должно быть хотя бы одно однозначное число, т.к. произведение двух различных двузначных чисел больше 100. Число 1 нельзя включить ни в один набор, т. к. все имеющиеся у нас числа различны. Тогда можно составить не более 8 наборов. Ровно 8 наборов составить можно, например: (9, 11, 99), (8, 12, 96), (7, 13, 91), (6, 14, 84), (5, 15, 75), (4, 16, 64), (3, 17, 51), (2, 18, 36).

   Комментарий. Верное решение с верным ответом — **7 баллов**. Есть оценка, что наборов не более 8, но нет примера – **3 балла**. Есть пример на 8, но нет оценки — **3 балла**. Только ответ — **0 баллов**.

5. В последовательности a_1, a_2, a_3,… сумма любых трёх подряд идущих чисел равна 2018, причём a_3=668, a_{199}=667. Чему равно a_{2018}?

   Ответ. a_{2018} = 683.

   Решение. Пусть $a_4 = x$, тогда $a_5 = 2018 - x - 668 = 1350 - x$, $a_6 = 2018 - x - (1350 - x) = 668$, $a_7 = x$ и т.д. То есть числа повторяются с периодом 3. Значит, $a_{199} = a_{3\cdot 65+4} = a_4 = 667$, то есть $x = 667$, тогда $a_{2018} = a_{3\cdot 671+5} = a_5 = 1350 - x = 1350 - 667 = 683$.

   Комментарий. Верное решение с верным ответом — **7 баллов**. Показана периодичность — **3 балла**. Только ответ — 1 **балл**.