11 класс *(Время решения – 4 часа)*

1. Если на доске есть ненулевое число a, то разрешается выписать на доску число $\frac{1}{a}$. Если на доске есть числа a и b, то разрешается выписать на доску число $a+b$, также разрешается выписать на доску число $a-b$ (в качестве a и b можно использовать одно и то же число).

   Изначально на доске написано число $3+\sqrt{5}$. Докажите, что при помощи только лишь указанных операций можно выписать на доску число 1.

2. Про многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами известно, что $P(0)$ и $P(1)$ нечётные числа. Может ли многочлен $P(x)$ иметь целые корни?

3. В ромбе $ABCD$ на стороне DC взяли точку T, а на диагонали AC — точку N так, что углы CAT и NBC равны. Докажите, что $NT = NC$.

4. Про три положительных действительных числа x, y и z известно, что $xyz = 1$. Докажите, что из трёх чисел $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1+y}$ и $\frac{1}{1+z}$ найдутся два, сумма которых не меньше 1.

5. У Аркадия есть миллион карточек, на каждой из которых он написал натуральное число, при этом написанные числа попарно различны. Борис утверждает, что вне зависимости от того, какие числа написаны, он сможет выбрать непустой набор карточек, сумма чисел на карточках которого будет квадратом натурального числа (набор может состоять из одной карточки). Прав ли Борис?

Муниципальный этап Российской олимпиады по математике
2018-19 учебного года

11 класс *(Время решения – 4 часа)*

1. Если на доске есть ненулевое число a, то разрешается выписать на доску число $\frac{1}{a}$. Если на доске есть числа a и b, то разрешается выписать на доску число $a+b$, также разрешается выписать на доску число $a-b$ (в качестве a и b можно использовать одно и то же число).

   Изначально на доске написано число $3+\sqrt{5}$. Докажите, что при помощи только лишь указанных операций можно выписать на доску число 1.

2. Про многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами известно, что $P(0)$ и $P(1)$ нечётные числа. Может ли многочлен $P(x)$ иметь целые корни?

3. В ромбе $ABCD$ на стороне DC взяли точку T, а на диагонали AC — точку N так, что углы CAT и NBC равны. Докажите, что $NT = NC$.

4. Про три положительных действительных числа x, y и z известно, что $xyz = 1$. Докажите, что из трёх чисел $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1+y}$ и $\frac{1}{1+z}$ найдутся два, сумма которых не меньше 1.

5. У Аркадия есть миллион карточек, на каждой из которых он написал натуральное число, при этом написанные числа попарно различны. Борис утверждает, что вне зависимости от того, какие числа написаны, он сможет выбрать непустой набор карточек, сумма чисел на карточках которого будет квадратом натурального числа (набор может состоять из одной карточки). Прав ли Борис?