Муниципальный этап Российской олимпиады по математике 2018-19 учебного года
10 класс (*Время решения – 4 часа)*

1. Решить уравнение $x+\frac{1}{x-1}=2\sqrt{\frac{x}{x-1}}$.

   Ответ: $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   Решение. Областью определения функций, входящих в уравнение, является множество $(-\infty,0]\cup(1,\infty)$, но корни уравнения должны удовлетворять неравенству $x>1$, поскольку в случае $x\le 0$ левая часть уравнения отрицательна, а правая положительна. При условии $x>1$ уравнение можно переписать в виде $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)^2=0$, откуда $\sqrt{x(x-1)}=1$, откуда $x^2-x-1=0$. Из двух корней $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ квадратного уравнения исходному уравнению удовлетворяет один: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   Комментарий. Решение содержит ошибки, приводящие к лишним корням или к потере корней — не более 4 баллов.

2. Натуральное число называется простым, если оно делится нацело только на себя и на единицу. Найти все простые числа *p*, для которых $2p+1$ – точный куб натурального числа.

   Ответ: $p=13$.

   Решение. Пусть $2p+1=m^3$, тогда $2p=m^3-1=(m-1)(m^2+m+1)$. Так как $2p$ – четное, то $m=2k+1\,(k\in N)$, то есть $p=k(4k^2+6k+3)$. Очевидно, что $4k^2+6k+3>1$, значит, если и $k>1$, то *p* – составное число. Остается единственный вариант: $k=1$. В этом случае $p=13$ (простое число), а $2p+1=27=3^3$.

   Комментарий. Ответ (13) без доказательства единственности (или с неверным доказательством) — 1 балл.

3. В равностороннем треугольнике *ABC* на стороне *AB* выбрана точка *F*, а на стороне *AC* – точка *K*, так, что $BF=AK$. Пусть *O* – точка пересечения *BK* и *FC*. Найти угол *KOC*.

   Ответ: 60°.

   Решение. Из условий задачи следует, что $AC=BC$, $AF=KC$, $\angle A=\angle C$, значит $\Delta AFC=\Delta BKC$, откуда следует, что $\angle OBC=\angle OCK$. Искомый угол *KOC* является внешним углом треугольника *BOC*, следовательно, $\angle KOC=\angle OBC+\angle BCO=$

   $=\angle OBC+\angle C-\angle OCK=\angle C=60^\circ$.

4. Можно ли в квадрат со стороной 1 см поместить некоторое количество попарно не пересекающихся кругов, сумма диаметров которых больше 1 м?

   Ответ: можно.

   Решение. Проведя в исходном квадрате $n-1$ вертикальную и $n-1$ горизонтальную линию, разобьем его на n^2 одинаковых маленьких квадратиков размером $1/n\times 1/n$ см. В половину квадратиков впишем (в шахматном порядке) круги диаметром $1/n$ см. Очевидно, эти круги

не имеют общих точек. Сумма диаметров всех кругов не меньше, чем $n/2$ см, следовательно, при любом $n > 200$ сумма диаметров вписанных кругов будет больше 1 м.

Комментарий. Только ответ («можно») — 0 баллов. Рассуждение в стиле «Чем меньше круги, тем больше сумма диаметров» без примера — не более 3-х баллов. Любые попытки обосновать ответ «нельзя» — 0 баллов.

5. Десять внешне одинаковых монет выложены в ряд. Среди них есть две фальшивые монеты, которые лежат рядом. У Димы есть детектор, который позволяет определить, сколько фальшивых монет содержится в любом данном наборе монет (не обязательно лежащих рядом). Покажите, что Дима сможет обнаружить все фальшивые монеты, использовав детектор только два раза.

Предварительное рассуждение. Имеется 9 вариантов расположения фальшивых монет. С другой стороны, каждое применение детектора дает один из трех возможных результатов (0, 1 или 2 монеты), а два использования детектора дают ровно 9 вариантов результатов: 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22. Следовательно, нужно так использовать детектор, чтобы первое его применение разбивало возможные варианты расположения фальшивых монет на 3 группы по 3 варианта. После первого применения детектора останутся три подозрительных пары монет, и второе применение детектора должно определить, в какой из этих пар обе монеты фальшивые.

Решение. Пронумеруем монеты слева направо. Применим детектор к набору монет 5, 7, 8, 9, 10 (см. рис.).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Если фальшивые монеты – 1 и 2, 2 и 3 или 3 и 4, то детектор покажет, что в выбранном наборе нет фальшивых монет; если 4 и 5, 5 и 6 или 6 и 7 – то одна; если 7 и 8, 8 и 9 или 9 и 10 – то две. В каждом случае вторым применением детектора требуется решить одну и ту же задачу: для четырех монет, лежащих в ряд, определить, какие две лежащие рядом монеты являются фальшивыми. Это делается применением детектора к набору из двух монет, лежащих с краю. Так, если первое применение детектора показало ноль фальшивых монет в наборе, то второй раз достаточно применить детектор к набору из двух монет 1 и 2; если одну – то к набору из монет 4 и 5, если две – 7 и 8.

Примечание. Решение не единственное.

Комментарий. Рассуждение о разбиении девяти вариантов на 3 группы по 3 варианта без решения – 3 балла. Если при этом также указан верный первый ход – 4 балла.