Муниципальный этап Российской олимпиады по математике 2018-19 учебного года
9 класс *(Время решения – 4 часа)*

1. На окружности расставлены четыре действительных числа, сумма которых равна нулю. Для каждой пары соседних чисел нашли их произведение и полученные четыре числа просуммировали. Может ли полученная сумма быть положительной?

   Ответ. Нет.

   Решение. Пусть x, y, z и t — наши числа в порядке следования на окружности. По условию $x+y+z+t=0$, значит $y+t=-(x+z)$. Сумма из условия — $s = xy+yz+zt+tx = x(y+t)+z(y+t) = (x+z)(y+t) = -(x+z)^2 \leqslant 0$. Отсюда следует, что сумма не может быть положительной.

   Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

2. Железнодорожная линия длинной 56 километров разделена на десять участков подряд идущими станциями $A_1, A_2, \ldots, A_{11}$. Суммарная длина любых двух последовательных участков не больше 12 км, и суммарная длина любых трёх последовательных участков не меньше 17 км. Найдите все возможные значения длины линии между A_2 и A_7.

   Ответ. 29 км.

   Решение. Докажем, что длина любого участка не меньше 5 км. К любому участку либо слева, либо справа примыкают два последовательных участка, сумма длин которых не больше 12 км. Если найдётся участок длины менее 5 км, то суммарная длина всех трёх участков будем меньше 17 км, что противоречит условию.

   Рассмотрим крайний левый участок. Оставшиеся 9 разбиваются на три куска по три последовательных участка, значит их суммарная длина не меньше $17 \cdot 3 = 51$ км. Если длина хотя бы одного из кусков будет больше 17 км, то их суммарная длина больше 51 км, значит длина крайнего левого меньше $56 - 51 = 5$ км, что противоречит ранее доказанному. Значит длины всех трёх кусков равны 17 км, и длина самого левого равна $56 - 51 = 5$ км. Аналогично доказывается, что длина самого правого участка равна 5 км, и все длины A_1A_4, A_4A_7, A_7A_{10} равны 17 км.

   Осталось заметить, что длина линии между A_2 и A_7 равна сумме длин A_1A_4 и A_4A_7 без крайнего левого участка, то есть равна $17 \cdot 2 - 5 = 29$ км. Конструкция, при которой выполнены все ограничения на длины участков, выглядит так: первый, четвёртый, седьмой и десятый участок длины 5 км, все остальные участки — 6 км.

   Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

   Дан ответ, и приведена конструкция когда он достигается — 1 балл.

   Доказано, что каждый из участков не меньше 5 км — 1 балл.

   Доказано, что крайние участки равны 5 км, или доказано, что суммарная длина трёх последовательных участков (если центральный из них не четвёртый и не седьмой) равна 17 — 2 балла.

   Баллы по предыдущим трём пунктам суммируются.

   Если доказано, что длина может быть только 29 км, но не доказано, что конструкция существует — 6 баллов.

   Замечание. Приведённая в решении конструкция не единственна.

3. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ нашлась такая точка N, что $AB = BN$. На отрезке AN нашлась такая точка T, что $\angle ATD = 90^\circ$ и $AT = TN + ND$. Докажите, что $\angle BAN = \angle NDC$.

Первое решение. Пусть прямые AN и DC пересекаются в точке F. Так как $AB = BN$, то $\angle BAN = \angle BNA$. Углы BNA и NAD равны, как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AN; углы BAN и AFD равны, как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей AN. Отсюда — $\angle FAD = \angle NAD = \angle BNA = \angle BAN = \angle AFD$, значит треугольник AFD равнобедренный, и высота TD является и медианой. Значит $AT = TF = TN + NF$, но по условию $AT = TN + ND$. Поэтому $ND = NF$, $\angle NDF = \angle NFD = \angle BAN$.

Второе решение. Возьмём на отрезке AT такую точку R, что $RT = TN$. Тогда прямоугольные треугольники RTD и TND равны по двум катетам, значит $RD = ND$. Поэтому $AR = AT - TR = TN + ND - TR = ND = RD$, значит $\angle RAD = \angle RDA$. Как и в первом доказательстве показывается, что $\angle BAN = \angle BNA = \angle NAD$, поэтому если $\angle BAN = \alpha$, то $\angle TRD = 2\alpha$, $\angle RDT = 90^\circ - 2\alpha$. Так как $\angle BAN = \alpha$, то $\angle ADC = \angle ABC = 180^\circ - 2\alpha$. С другой стороны, $\angle ADC = \angle ADR + 2\angle RDT + \angle NDC = \alpha + 2(90^\circ - 2\alpha) + \angle NDC$. Отсюда следует, что $\angle NDC = \alpha$, $\angle NDC = \angle BAN$.

4. Найдите все простые числа p, для которых число $2^p + p^2$ также будет простым.

Ответ. $p = 3$.

Решение. Введём обозначение $a_n = 2^n + n^2$. Число $a_2 = 8$ не является простым, $a_3 = 17$ — простое. Заметим ещё, что $a_n > n^2 \geqslant n$.

Пусть n нечётное число, $n \geqslant 5$, n не делится на 3. Тогда $n = 2k + 1$, $2^n = 2^{2k+1} = 2 \cdot 4^k = 2 \cdot (3+1)^k$. В числе $(3+1)^k = (3+1) \cdot (3+1) \cdot \ldots \cdot (3+1)$ мы раскрываем скобки так: из каждой скобки берётся либо 3, либо 1, выбранные числа перемножаются, и все полученные 2^k произведений суммируются. Но ясно, что каждое из полученных слагаемых будет делиться на три, кроме числа 1. Поэтому $(3+1)^k = 3m + 1$, $2^n = 2 \cdot (3+1)^k = 2(3m+1) = 3l+2$. Так как n не делится на 3, то $n = 3t \pm 1$, $n^2 = 9t^2 \pm 6t + 1$, $n^2 = 3s + 1$. Итак, $a_n = 2^n + n^2 = 3l + 2 + 3s + 1 = 3(l + s + 1)$, a_n делится на 3.

Если число p простое и больше трёх, то оно нечётно и не делится на три. Значит $a_p > 3$ делится на 3, и a_p не может быть простым.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Не рассмотрен случай $p = 2$, но в остальном решение верно — 6 баллов.

Сформулировано, но не доказано утверждение о том, что $2^p + p^2$ делится на 3 при простых $p > 3$ — 1 балл.

5. Каждую клетку клетчатого квадрата 100×100 можно покрасить либо в синий, либо в белый цвет. Назовём раскраску чётной, если в каждом клетчатом квадрате 2×2 чётное количество синих клеток. Назовём раскраску нечётной, если в каждом клетчатом квадрате 2×2 нечётное количество синих клеток. Докажите, что чётных раскрасок столько же, сколько нечётных. (Раскраски различны, если отличаются цветом хотя бы одной клетки. Так, например, раскраска с ровно одной синей клеткой в правом верхнем углу отлична от раскраски с ровно одной синей клеткой в правом нижнем углу.)

Первое решение. Пусть A — множество всех клеток квадрата, лежащих в чётной строке и чётном столбце. Будем называть изменение цвета каждой клетки из A перекрашиванием. В каждом клетчатом квадрате 2×2 лежит ровно одна клетка

из A. Поэтому перекрашивание превращает чётную раскраску в нечётную. Если перекрашивание совершить дважды, то раскраска станет прежней, поэтому из двух разных чётных раскрасок получаются две разные нечётные. Действительно, если из двух разных чётных раскрасок можно перекрашиванием получить одну и ту же нечётную, то второе перекрашивание обязано превратить эту нечётную раскраску в две разных чётных, что невозможно.

Итак, перекрашивание сопоставляет чётной раскраске какую-то нечётную, и двум разным чётным раскраскам мы сопоставляем разные нечётные. Значит чётных раскрасок не больше, чем нечётных. Аналогично доказывается, что нечётных раскрасок не больше, чем чётных. Значит их одинаковое число.

Второе решение. Докажем, что чётных раскрасок ровно 2^{199}. Раскрасим произвольным образом первую строку и первый столбец. Суммарно в первом столбце и первой строке ровно 199 клеток. Так как каждую из клеток можно покрасить в один из двух цветов, то всего таких раскрасок 2^{199}.

Докажем, что чётная раскраска всего квадрата обязательно достраивается, причём ровно одним способом. В самом левом и верхнем квадрате 2×2, будут закрашены три клетки, и так как раскраска чётная, то цвет второго элемента второй строки однозначно определяется. Если сдвинуть самый левый и верхний квадрат 2×2 на одну клетку вправо, то мы снова будем знать в нём цвета трёх клеток, то есть будем знать цвет и четвёртой. Продолжая этот процесс, можно однозначно раскрасить всю вторую строку. Понятно, что ту же процедуру можно затем применить к третьей строке, затем к четвёртой строке и т.д. Таким образом, можно однозначно достроить чётную раскраску.

Итак, взяв любую из 2^{199} раскрасок первой строки и первого столбца, мы получаем ровно одну чётную раскраску всего квадрата. Ясно, что из двух разных раскрасок первой строки и первого столбца получаются разные чётные раскраски всего квадрата, ведь они будут отличаться уже в первом столбце или первой строке. Каждая чётная раскраска так может быть получена: если мы возьмём из неё первую строку и первый столбец, то наша операция обязана дать нам чётную раскраску. Так как мы обсудили, что операция даёт ровно одну чётную раскраску, то мы обязаны получить исходную чётную раскраску.

Если раскраска нечётная, то снова, зная цвета трёх клеток квадрата 2×2, можно однозначно восстановить цвет четвёртой клетки. Значит можно дословно повторить рассуждение для нахождения числа чётных раскрасок, и получить такое же число нечётных раскрасок.