Муниципальный этап Российской олимпиады по математике 2018-19 учебного года

8 класс (*Время решения – 4 часа)*

1. В Королевстве живут лжецы (они всегда лгут) и рыцари (они всегда говорят правду). Однажды в зале собрались советники короля. Один из советников сказал: «В этом зале количество лжецов отличается от количества рыцарей на 1». Двое других советников сказали: «В этом зале количество лжецов отличается от количества рыцарей на 2». Остальные 3 советника сказали: «В этом зале количество лжецов отличается от количества рыцарей на 3». Сколько лжецов могло быть среди собравшихся в зале советников?

   Ответ. 4 или 6.

   Решение. Всего в зале собралось 6 советников. Соответственно, среди них может быть от 0 до 6 лжецов, при этом количество лжецов от количества рыцарей может отличаться на 0, 2, 4 или 6. Таким образом, 4 советника, утверждавшие, что количество отличается на 1 и на 3, точно соврали. Остальные 2 советника могли быть и лжецами (тогда все собравшиеся – лжецы, и количество отличается на 6), а могли быть и рыцарями (тогда они сказали правду, что количество отличается на 2, поскольку рыцарей 2, а лжецов 4).

   Комментарий. Только ответ – 0 баллов. Ответ + проверка, что такие ситуации возможны и удовлетворяют условиям, но не доказано, что другие ситуации невозможны – 2 балла (если в ответе только одно значение и проверяется только оно – 0 баллов). Доказано, что советники, утверждавшие, что количество отличается на 1 и на 3, лжецы – 3 балла.

2. Гоночный автомобиль в обычном режиме двигается со скоростью 200 км/ч, потребляя при этом 0,2 л топлива на 1 км пути, а в турборежиме двигается со скоростью 250 км/ч, но потребляет при этом 0,3 л топлива на 1 км пути. Ёмкость топливного бака автомобиля составляет 80 л. За какое наименьшее время автомобиль может преодолеть без дозаправок всю дистанцию гонки длиной 300 км?

   Ответ. За 1,3 ч (1ч 18 мин).

   Решение 1. Обозначим за x (км) расстояние, пройденное в турборежиме. Тогда, чтобы топлива хватило на весь путь, должно выполняться условие: $0{,}3x + 0{,}2(300–x) \leq 80$. Очевидно, что время будет наименьшим, если автомобиль проедет максимально возможное расстояние в турборежиме. Отсюда находим, что $x = 200$ (км). Исходя из этого находим общее время: 200/250 + 100/200 = 0,8 + 0,5 = 1,3 (ч).

   Решение 2. Проехать весь путь в турборежиме не получится, так как для этого потребовалось бы 300*0,3 = 90 л, поэтому часть пути автомобиль должен проехать в обычном режиме. Понятно, что весь бензин к концу самой быстрой поездки должен быть использован, иначе часть пути можно было бы ехать с большей скоростью, значит приехать раньше. Если ехать весь путь со скоростью 200 км/ч, то к концу поездки останутся «лишние» 20 литров. Имея «лишние» 0,1 л топлива, можно 1 км ехать в турборежиме. Таким образом, чтобы израсходовать все «лишние» 20 литров, в турборежиме нужно ехать 200 км (а остальные 100 км – в обычном режиме). Таким образом, общее время составит 200/250 + 100/200 = 0,8 + 0,5 = 1,3 (ч).

   Комментарий. Только ответ – 1 балл. Ответ + проверка (указано, сколько км нужно проехать в турборежиме и есть проверка, что топлива хватит), но не доказано, что это наименьшее время – 3 балла.

3. В равнобедренном треугольнике ABC угол A при основании равен 75^0. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K. Найдите расстояние от точки K до основания AC, если $BK = 10$.

   Ответ. 5.

   Решение. В треугольнике ABC $\angle B = (180 – 75 – 75) = 30$. Опустим из точки K перпендикуляр KH на сторону AB. В прямоугольном треугольнике HBK гипотенуза BK равна 10. $\angle B = 30$, против него лежит половина гипотенузы, значит $HK = 5$. Точка K лежит на биссектрисе

угла A, следовательно, она равноудалена от сторон этого угла. Расстояние до стороны AB равно $KH = 5$, значит и расстояние до AC тоже равно 5.

4. На доске написано трехзначное число, в записи которого нет ни одного нуля. Петя записал к себе в тетрадь все различные числа, которые можно получить из исходного перестановкой цифр (включая число, написанное на доске). Сумма всех чисел, записанных Петей в тетрадь, оказалась равна 444. Какое число могло быть изначально написано на доске?

   Ответ. 112, 121, 211, 444.

   Решение. Если бы в исходном трехзначном числе все цифры были различны, то Петя записал бы 6 различных трехзначных чисел, и их сумма была бы не меньше 600. Таким образом, возможны два случая. 1) Если все цифры были одинаковы, то Петя записал всего одно исходное число, и оно как раз равно 444. 2) В исходном числе было 2 одинаковые цифры. Пусть в числе было две цифры a и одна цифра b. Тогда Петя записал себе в тетрадь числа $100a+10a+b$, $100a+10b+a$ и $100b+10a+a$. Их сумма равна $222a+111b = 111(2a+b)$. Таким образом, $2a+b = 444/111 = 4$. Отсюда получаем единственное решение: $a=1$, $b=2$.

   Комментарий. Только ответ – 1 балл (если перечислены все 4 числа, иначе – 0 баллов). Не рассмотрен случай, когда все цифры были одинаковы (соответственно, в ответе пропущено число 444) – 5 баллов. Если не доказана невозможность случая, когда все 3 цифры были различны (либо такой случай не рассмотрен вовсе) – снимать 2 балла (то есть если все остальное верно, получается 5 баллов, если случай со всеми тремя одинаковыми цифрами тоже не рассмотрен, то с учетом предыдущего критерия получается 3 балла).

5. На доске написано простое число большее 1000, в записи которого нет нулей. Докажите, что из него можно вычеркнуть одну или две цифры так, чтобы получилось составное число.

   Доказательство. Обозначим исходное простое число за p, а сумму его цифр за s.

   1) Очевидно, что s не кратно 3 (иначе бы p делилось на 3).

   2) Предположим, что s дает остаток 1 при делении на 3. Если среди цифр числа p есть цифра, дающая остаток 1 при делении на 3 (то есть 1, 4 или 7), то, вычеркнув эту цифру, мы получим, что сумма оставшихся цифр кратна 3, то есть полученное число кратно 3. Если же таких цифр нет, то среди цифр числа p есть по крайней мере две цифры, дающие остаток 2 при делении на 3 (иначе s дает остаток 0 или 2 при делении на 3). Эти две цифры в сумме дают остаток 1 при делении на 3. Вычеркнув их, мы получим, что сумма оставшихся цифр кратна 3, то есть полученное число кратно 3.

   3) Ситуация, когда s дает остаток 2 при делении на 3, разбирается аналогично случаю 2.

   Таким образом, в любом случае, вычеркивая одну или две цифры, мы получили число, кратное 3. Поскольку в исходном числе как минимум 4 ненулевых цифры, после вычеркивания останется как минимум 2 цифры, то есть оставшееся число как минимум двузначное. Таким образом, оставшееся число больше 3 и кратно 3, значит является составным.

   Комментарий. Доказано, что можно получить число, кратное 3, но не доказано, что оно будет больше 3 – 5 баллов.