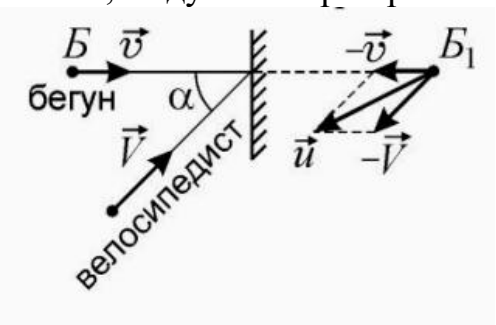
Всероссийская олимпиада школьников по физике. Муниципальный этап

Возможные решения задач
10 класс

Задача 1. Бегун в зеркале

Построение изображения $Б_1$ бегуна $Б$ представлено на рисунке. Относительно неподвижного наблюдателя это изображение движется по прямой $Б_1Б$ навстречу бегуну со скоростью, модуль которой равен υ.



Используя закон сложения скоростей, находим, что относительно велосипедиста изображение бегуна движется со скоростью u

$$\vec{u} = -\vec{\upsilon} - \vec{V}\,. \qquad (1)$$

По теореме косинусов имеем:

$$u^2 = \upsilon^2 + V^2 - 2\upsilon V\cos(\pi - \alpha)\,. \qquad (2)$$

Учитывая, что $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$, получаем квадратное уравнение:

$$\upsilon^2 + 2\upsilon V\cos\alpha + V^2 - u^2 = 0\,. \qquad (3)$$

Условию задачи удовлетворяет положительный корень

$$\upsilon = \sqrt{V^2\cos^2\alpha + u^2 - V^2} - V\cos\alpha\,. \qquad (4)$$

Так как $u = \sqrt{2}V$, это выражение преобразуется к виду:

$$\upsilon = \left(\sqrt{\cos^2\alpha + 1} - \cos\alpha\right)V\,. \qquad (5)$$

Окончательный ответ:

$$\upsilon = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}V \approx 9{,}3 \text{ км/час.}$$

Критерии оценивания решения:

Представлен рисунок с указанием скоростей для изображения бегуна – 2,5 балла.

Выписан закон сложения скоростей (1) – 2,5 балла.

Выписана теорема косинусов для скоростей – 2 балла.

Получены корни квадратного уравнения – 2 балла.

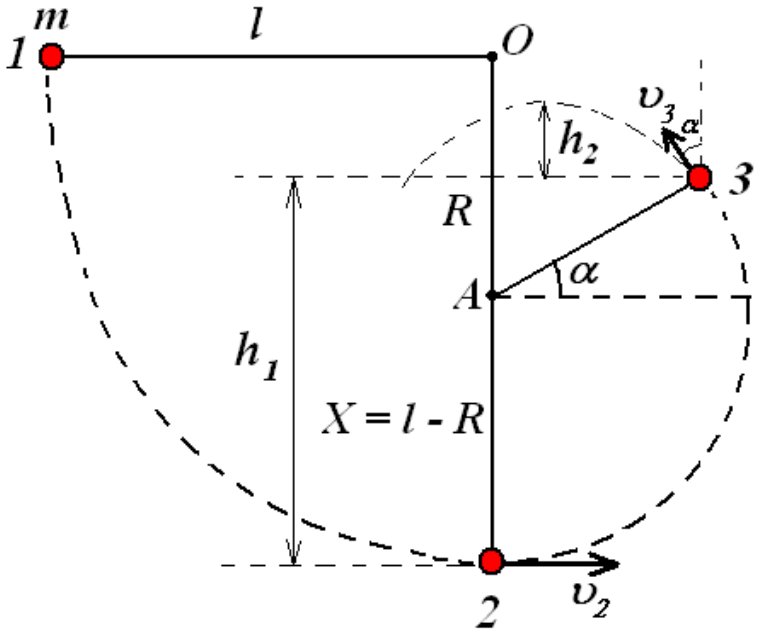
Выбран положительный корень и получен ответ – 1 балл.

Задача 2. Шарик на нити

Запишем закон сохранения механической энергии для точек *1* и *2* (см. рис.).

$$mgl = \frac{m\upsilon_2^2}{2}. \qquad (1)$$

Отсюда $\upsilon_2 = \sqrt{2gl}$.



Тело не сможет подняться на такую же высоту *l*, в точке 3 сила натяжения нити станет равной нулю. Найдем угол α, при котором это происходит. Второй закон Ньютона в проекции на направление *3A*:

$$ma_n = \frac{m\upsilon_3^2}{(l-R)} = mg\sin\alpha. \qquad (2)$$

Отсюда $\upsilon_3^2 = (l-R)g\sin\alpha$.

Запишем закон сохранения механической энергии для точек *2* и *3*:

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} = \frac{m\upsilon_3^2}{2} + mg(X + X\sin\alpha). \qquad (3)$$

Здесь $X = l - R$. Решая систему уравнений (2) и (3) получим:

$$\sin\alpha = \frac{2R}{3(l-R)}. \qquad (4)$$

Таким образом, высота h_1

$$h_1 = X + X\sin\alpha = (l-R)\left(1 + \frac{2R}{3(l-R)}\right). \qquad (5)$$

Осталось определить высоту h_2 (с учетом $\cos^2\alpha = 1 - \frac{4R^2}{9(l-R)^2}$).

$$h_2 = \frac{\upsilon_3^2\cos^2\alpha}{2g} = \frac{R}{3}\left(1 - \frac{4R^2}{9(l-R)^2}\right). \qquad (6)$$

Искомая высота *h*

$$h = h_1 + h_2 = (l-R)\left(1 + \frac{2R}{3(l-R)}\right) + \frac{R}{3}\left(1 - \frac{4R^2}{9(l-R)^2}\right). \qquad (7)$$

Частное решение при $l = 2R$:

$$h = \frac{50}{27}R.$$

Критерии оценивания решения:

Записан закон сохранения энергии для точек 1 и 2 (1) – 0,5 балла.

Получено соотношение для υ_2 – 0,5 балла.

Вывод о том, что в точке 3 натяжение нити станет нулевым – 1 балл.

Второй закон Ньютона для точки 3 (2) – 1 балл.

Получено соотношение для υ_3 – 0,5 балла.

Записан закон сохранения энергии для точек 2 и 3 (3) – 1 балл.

Получено выражение для угла α (4) – 2 балла.

Определена высота h_1 (5) – 1 балл.

Определена высота h_2 (6) – 1 балл.

Определена искомая высота h (7) – 0,5 балла.

Получено частное решение при $l = 2R$ – 1 балл.

Задача 3. Лед и вода

Для решения важно заметить, что не весь лед растаял. Покажем это. Далее в решении индекс 1 используется для льда, 2 – для воды, в условии задачи наоборот!

$m_1 = m_2$, где $m_1 -$ масса льда, $m_2 -$ масса воды.

$\frac{\rho_1 V_1}{\rho_2 V_2} = 1$, отсюда $V_1 = \frac{10}{9}V_2$ или $V_2 = \frac{9}{10}V_1$.

Общий объем льда и воды в начале:

$$V_1 + V_2 = HS = \frac{19}{10}V_1 = \frac{19}{9}V_2, \qquad (1)$$

где S – сечение сосуда.

При полном таянии льда, образуется объем воды: $V_2^I = \frac{9}{10}V_1$.

Тогда общий объем воды в конце:

$$V_2^I + V_2 = (H - b)S = \frac{9}{10}V_1 + V_2. \qquad (2)$$

Из (1) вычитаем (2): $bS = \frac{1}{10}V_1$ или $b = \frac{1}{10} \cdot \frac{V_1}{S}$.

Из (1) следует, что $V_1 = \frac{10}{19}HS$, тогда $b = \frac{1}{19}H \approx 1.05$ см > 0.4 см!

Таким образом, не весь лед тает и установившаяся температура в системе:

$$t_K^\circ = 0^\circ C.$$

Из уравнения теплового баланса

$$c_2 m_2 (t_H^\circ - t_K^\circ) = \lambda M_1, \qquad (3)$$

где $m_2 = m_1 -$ начальная масса воды, равная начальной массе льда в сосуде, $M_1 -$ масса растаявшего льда.

Учтем изменение объема

$$\frac{m_2}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} = HS, \qquad (4)$$

$$\frac{M_1}{\rho_1} - \frac{M_1}{\rho_2} = bS. \qquad (5)$$

Из (3), (4) и (5) получаем

$$t_H^\circ = \frac{\lambda b}{c_2 H} \cdot \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{(\rho_2 - \rho_1)} = \approx 29.9^\circ C.$$

Критерии оценивания решения:

Доказано, что не весь лед растает – 3 балла.

Сделан правильный вывод об установившейся конечной температуре – 1 балл.

Выписано уравнение теплового баланса – 2 балла.

Соотношение (4) – 1 балл.

Соотношение (5) – 1 балл.

Получен правильный ответ – 2 балла.

Задача 4. Реостат

Сопротивление R_{OA}, измеряемое омметром, представляется двумя параллельно соединенными резисторами R_{AB} и R_{BA}, которые представляют сопротивления участков реостата *AB* и *BA*. При этом:

$$R_{AB} + R_{BA} = R_0, \qquad (1)$$

где R_0 – полное сопротивление провода реостата.

Сопротивление R_{OA}:

$$R_{OA} = \frac{R_{AB} R_{BA}}{R_{AB} + R_{BA}} = \frac{R_{AB} R_{BA}}{R_0}. \qquad (2)$$

Удобно построить график для отношения

$$\frac{R_{OA}}{R_0} = \frac{R_{AB}R_{BA}}{R_0^2}. \qquad (3)$$

В соответствии с моделью реостата

$$R_{AB} = \rho l_{AB} = \rho\alpha r, \qquad (4)$$

$$R_{BA} = \rho l_{BA} = \rho(2\pi - \alpha)r, \qquad (5)$$

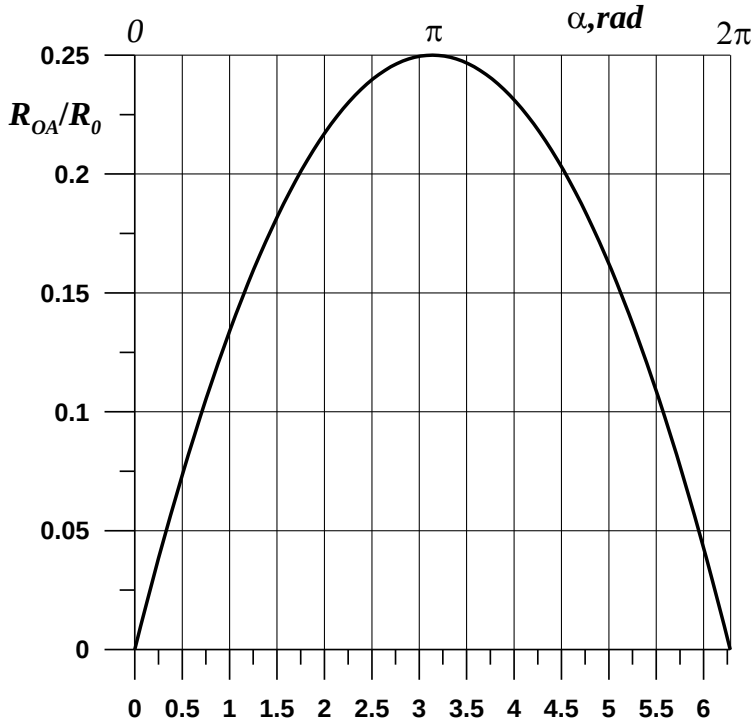
$$R_0 = \rho \cdot 2\pi r, \qquad (6)$$

где ρ – сопротивление единицы длины провода, r – радиус реостата.

Подставляя данные выражения в (3), получаем:

$$\frac{R_{OA}}{R_0} = \frac{2\pi\alpha - \alpha^2}{(2\pi)^2}. \qquad (7)$$

Строим график, он симметричный относительно точки $\alpha = \pi$.



Критерии оценивания решения:

Выписано соотношение (1) – 1 балл.

Определено сопротивление R_{OA} (2) – 1 балл.

Выбор в пользу безразмерного графика (3) – 2 балла.

Выписано соотношение для R_{AB} (4) – 1 балл.

Выписано соотношение для R_{BA} (5) – 1 балл.

Выписано соотношение для R_0 (6) – 1 балл.

Получена зависимость безразмерного сопротивления от угла a (7) – 1 балл.

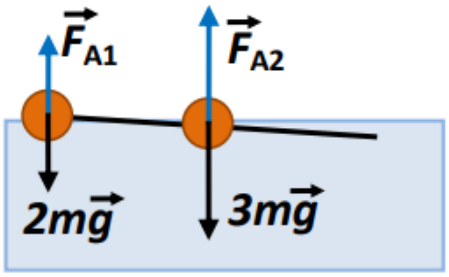
Построен график – 2 балла.

Задача 5. Два шарика на стержне

Обозначим искомые величины x (доля объема погруженной части для «крайнего» шара) и y (для «среднего» шара). Пусть масса стержня равна m. Это значит, что массы шаров равны

$$km = \rho \cdot V, \qquad (1)$$

где ρ – плотность дерева, а V – объем одного шара).



Сумма сил Архимеда, действующих на шары, должна уравновешивать вес всех тел (рис.):

$$n\rho(xV + yV)g = (2k+1)mg = \frac{2k+1}{k}\rho V g. \qquad (2)$$

Из этого соотношения определяем, что

$$x + y = \frac{2k+1}{kn} = 1. \qquad (3)$$

Кроме того, должна равняться нулю сумма моментов сил, приложенных к стержню. Как видно из рисунка, это возможно только в том случае, когда отношение сил Архимеда равно отношению сил тяжести, с которыми у них совпадает точка приложения:

$$\frac{n\rho \cdot xVg}{n\rho \cdot yVg} = \frac{kmg}{(k+1)mg}. \qquad (4)$$

Откуда

$$\frac{x}{y} = \frac{k}{k+1} = \frac{2}{3}. \qquad (5)$$

Решая полученную систему уравнений (3) и (5), находим:

$$x = \frac{1}{n} = 0{,}4 = 40\% \text{ и } y = \frac{k+1}{kn} = 0{,}6 = 60\%.$$

Критерии оценивания решения:

Записано соотношение для массы шаров (1) – 0,5 балла.
Представлен правильный рисунок с указанием сил – 1 балл.
Записано равенство нулю суммы всех сил (2) – 2 балла.
Записано равенство нулю суммы моментов сил (4) – 2,5 балла.
Получена система уравнений (3), (5) – 2 балла.
Правильное значение x – 1 балл.
Правильное значение y – 1 балл.